DEVOIR MAISON IV

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Partie I

Vrai ou Faux ?

Date: 6Janvier 2024.
http://louismerlin.fr.

Exercice 1 *Comparaisons de suites et de fonctions.*

1	$e^x = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\ln(x))$	
2	$e^x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 + x + x^2/2$	
3	Si (u_n) vérifie (pour tout $n \in \mathbb{N}$), $n \leqslant u_n \leqslant n + n^2 + \frac{1}{n}$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$	
4	$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2}$	
5	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2} = \frac{1}{4}$.	
6	$\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2) \underset{x\to 0}{\sim} 0$	
7	$\forall k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.	
8	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = e^2$.	
9	$\ln(n+1) - \ln(n) = \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}(1)$.	
10	$e^{x^2} = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)$.	
11	$x^2 - 3x + 2 = 2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)$.	
12	$x^2 - 3x + 2 = 2 + \underset{x\to 1}{\mathbf{o}}(1)$.	
13	$\frac{x\ln(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} x$.	
14	Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n$	

Exercice 2 *Suites et séries.*

1	Si f est croissante alors (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.	
2	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.	
3	Si $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors la série $\sum u_n$ converge.	
4	Avec $u_n = \frac{2n-\ln(n)+1}{n^2\sqrt{n}+3n-1}$ la série $\sum u_n$ converge.	
5	Si $u_n \geqslant 0$ et que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum u_n$ diverge.	
6	La série $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$ converge.	
7	Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n - v_n)$ diverge.	
8	Si $u_n \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \frac{1}{n} + 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.	
9	Si $u_n \geqslant 0$ et $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ converge.	
10	$\sum u_n$ converge, où $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	
11	La série $\sum u_n$ diverge, où $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$	
12	La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{e^n u_n}$ converge.	

Exercice 3 *Espaces vectoriels.*

1	Un espace vectoriel contient toujours le nombre réel 0.	
2	$\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$	
3	$\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.	
4	$F = \{(x+y, -y, 0) : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.	
5	$F = \{(x+y, -y, 0) : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est engendré par deux vecteurs non colinéaires.	
6	$\mathrm{Vect}((1,1),(1,2),(3,3)) = \mathrm{Vect}((-1,0),(1,1))$.	
7	$\mathrm{Vect}((1,1),(2,2),(3,3)) = \mathrm{Vect}((-1,0),(1,1))$.	
8	La famille (X^2-1, X^2+1, X^2) est libre.	
9	Si $u_3 \in \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, alors (u_1,u_2,u_3) est libre.	
10	Si $u_3 \in \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, alors $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$.	
11	La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.	
12	$(0,0,1)$ a pour coordonnées $(1,0,0)$ dans la base $((0,0,1),(1,0,0),(0,-1,0))$	

Exercice 4 *Intégration.*

1	Si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.	
2	Si $d\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.	
3	$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{t^2}-1}{t}\mathrm{d}t$ converge.	
4	$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4+t}$ converge.	
5	Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=0$.	
6	Si f est positive et paire et que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3f(t)=0$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t=0$.	
7	$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\ln(1+t))^2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ converge.	
8	$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$	
9	Si f est $\mathcal{C}^2$ sur $[0;1]$ et que $f(0)=f'(0)$ alors $\displaystyle\int_0^1\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge.	
10	Si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$, alors $f(t)\geqslant 0$ sur $[0;1]$.	
11	Si f est continue sur $[a;b]$ alors il existe une constante $M\geqslant 0$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\leqslant M(b-a)$.	
12	$\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{2x^2}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^2}=1$.	

Exercice 5 *Applications linéaires.*

1	Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ alors f est injective.	
2	La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible.	
3	La matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P + 2P'$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
4	L'endomorphisme de la question précédente est un automorphisme.	
5	Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ alors f injective.	
6	Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ alors f surjective .	
7	Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.	
8	Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$. Alors, pour tout $u \in E$, $(u, f(u))$ est liée.	
9	Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$. Alors $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.	

Partie II

Exercice 6

Rédiger un exercice de TD sur le thème le moins réussi de ce quizz.